Pedagogicheskoe obrazovanie [Federal state educational standard of higher education – bachelor's degree in the field of training 44.03.01 Pedagogical education], available at: https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/440301_B_3_15062021.pdf (accessed 25 January 2022).

9. Sheremet'eva O. V. *Organizatsija gruppovoj raboty studentov v protsesse osvoenija tehnologij nachal'nogo matematicheskogo obrazovanija* [Organization of group work of students in the process of mastering technologies of primary mathematical education]. Gercenovskie chteniya, Nachal'noe obrazovanie, 2019, vol. 10, no. 2, pp. 195–199 (in Russian).

10. Trapitsin S. Y., Granichina O. A. & Granichin O. N. Information and mathematical models for evaluation of the effectiveness and quality of the university. Proceedings of the 2017 International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" September, 23–30, Saint Petersburg, IEEE, 2017, pp 287–291.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ
Принадлежность к организации

Шереметьева Ольга Владиславовна, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра начального естественно-математического образования, Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия, olga.sheremetyeva@gmail.com

INFORMATION ABOUT AUTHOR
Affiliation

Olga V. Sheremetyeva, Ph. D. (Pedagogy), Associate Professor, Department of Primary Natural and Mathematical Education, A. I. Herzen Russian State Pedagogical University, Saint Petersburg, Russia, olga.sheremetyeva@gmail.com

Принята в печать 28.02.2022

Received 28.02.2022

Педагогические науки / Pedagogical Science
Оригинальная статья / Original Article
УДК 378.148(018)
DOI: 10.31161/1995-0659-2022-16-1-2-115-120

Дискретные аналоги понятий непрерывной математики в комплексном обучении математике в профильной школе

Ярахмедов Г. А.[1], Гаджиев Т. С.[2]
[1]Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, Россия, Yari.85@mail.ru
[2]Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия, gts1964@mail.ru

РЕЗЮМЕ. Цель – на основе методологических принципов комплексного обучения математике разработать эффективный методический инструментарий выявления категориальных признаков во взаимодействиях методических объектов непрерывной и дискретной математики для создания и использования соответствующих понятий в обучении математике на уровне профильной школы. **Методы.** Анализ взаимодействия методических объектов непрерывной и дискретной математики, аналогия проявления их категориальных признаков и синтез различных подходов в контексте междисциплинарной интеграции в сфере образования. **Результаты.** Методически обосновано онтологическое единство понятий производной непрерывной функции и конечной разности дискретной функции. Обнаруженные аналогии свойств операций дифференцирования непрерывной функции и конечной разности дискретной функции позволили обобщить формулу Ньютона – Лейбница для некоторого класса функций и применить ее для исследования рекуррентных формул и вычисления сумм членов некоторых рациональных последовательностей заданной степени. **Выводы.** Комбинирование идей и методов непрерывной и дискретной математики способствует целостному восприятию методических объектов, формируя соответствующие компетенции у студентов, и обобщению базовых математических понятий на различных уровнях образования, обеспечивая тем самым непрерывность и преемственность математического образования в целом.

Ключевые слова: дискретная и непрерывная математика, производная, конечная разность, арифметическая и геометрическая прогрессии, рациональная последовательность

Формат цитирования: Ярахмедов Г. А., Гаджиев Т. С. Дискретные аналоги понятий непрерывной математики в комплексном обучении математике в профильной школе // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2022. Т. 16. № 1–2. С. 115–120. DOI: 10.31161/1995-0659-2022-16-1-2-115-120

Discrete Analogues of the Continuous Mathematics Concepts in the Comprehensive Teaching of Mathematics in a Specialized School

© 2022 **Gadzhiakhmed A. Yarakhmedov[1], Tazhudin S. Gadzhiev[2]**
[1]Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia, Yari.85@mail.ru
[2]Dagestan State University, Makhachkala, Russia, gts1964@mail.ru

ABSTRACT. The **aim** is on the basis of the methodological principles of integrated teaching in mathematics, develop an effective methodological toolkit for identifying categorical features in the interactions of methodological objects of continuous and discrete mathematics in order to create and implement appropriate technologies for teaching mathematics at various levels of education. **Methods.** Analysis of the interaction of methodological objects of continuous and discrete mathematics, the analogy of the manifestation of their categorical features and the synthesis of various approaches in the context of interdisciplinary integration in the field of education. **Results.** The ontological unity of the concepts of the derivative of a continuous function and the finite difference of a discrete function has been methodically substantiated. The discovered analogies of the properties of the operations of differentiation of a continuous function and the finite difference of a discrete function made it possible to generalize the Newton - Leibniz formula for a certain class of functions and apply it to study recurrent formulas and calculate the sums of terms of some rational sequences of a given degree. **Conclusions.** The combination of ideas and methods of continuous and discrete mathematics contributes to the holistic perception of methodological objects, forming the corresponding competencies in students, and the generalization of basic mathematical concepts at different levels of education, thereby ensuring the continuity and continuity of mathematical education as a whole.

Keywords: discrete and continuous mathematics, derivative, finite difference, arithmetic and geometric progressions, rational sequence

For citation: Yarakhmedov G. A., Gadzhiev T. S. Discrete Analogues of the Continuous Mathematics Concepts in the Comprehensive Teaching of Mathematics in a Specialized School. Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences, 2022, vol. 16, no. 1–2, pp. 115–120. DOI: 10.31161/1995-0659-2022-16-1-2-115-120 (In Russian)

Введение

Наука и общество на современном этапе развития предъявляют к математическому образованию на всех его уровнях требования категориального (универсального) характера. Они отражены в государственных образовательных стандартах, которые предусматривают одновременную реализацию принципов личностно-ориентированного и практико-ориентированного образования, направленного на формирование соответствующих компетенций. Актуализация комплексного подхода к обучению математике в системе профильного обучения связана, прежде всего, с возрастающей ролью математики в исследованиях естественных, технических, гуманитарных наук и формированием у учащихся математических компетенций. Основные методологические принципы комплексного обучения математике на всех уровнях образования (принципы единства противоположностей, соответствия и определенности, аналогии, симметрии, двойственности, инвариантности и математического моделирования) способствуют формированию именно этих компетенций и универсальных учебных действий, а также развитию комплексного мышления [3; 4; 5; 6].

Цель статьи – на основе методологических принципов комплексного обучения математике разработать эффективный методический инструментарий выявления категориальных признаков во взаимодействиях методических объектов непрерывной и дискретной математики для создания и использования соответствующих понятий в обучении математике на уровне профильной школы.

В математическом образовании на всех уровнях обучения превалируют методы непрерывной математики. Между тем в постиндустриальном обществе, где информационные технологии играют ключевую роль, доминирование методов дискретной математики становится все более очевидным. В такой ситуации определяющим фактором развития новых образовательных технологий становится выявление системных свойств межпредметной интеграции в математическом образовании на основе указанных выше методологических принципов, главным образом принципов аналогии, единства противоположностей и определенности. Такая стратегия обучения математике требует активизации методов интеграции понятий и методических объектов по определенной схеме их комбинирования.

Результаты и обсуждение

Под математическим образованием мы будем понимать «учебно-воспитательный процесс, осуществляемый в ходе изучения математики на всех ступенях непрерывного образования, при котором происходит не только усвоение определенной совокупности математических знаний, умений и навыков, но и развитие мышления обучаемых, формирование их нравственной и духовной культуры» [2, с. 5]. В таком контексте обучение математике воспринимается как единство непрерывной и дискретной математики, где переход от одной модели представления методического объекта или понятия к другой модели осуществляется по определенной логической схеме, в которой аналогией действий выделяются категориальные свойства методических объектов.

Как известно, одним из фундаментальных понятий непрерывной математики является понятие производной функции или ее дифференциала. Естественным аналогом этого понятия в дискретной математике является понятие конечной разности. Их противоположность на онтологическом уровне вполне очевидна: производная функции определяется как предел числовой последовательности при неограниченном уменьшении значения приращения аргумента, когда как конечная разность принимает вполне определенное конечное (и ограниченное) значение. Формализуем вышесказанное.

Пусть y = f(x) – дифференцируемая функция. Тогда, как известно, $f'(x) = \quad = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, или имеем приближенное равенство $f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. В дифференциалах оно запишется в виде

$$df \approx f(x + \Delta x) - f(x). \tag{1}$$

Если функция y = f(x) является дискретной и Δx = h–постоянная фиксированная величина приращения аргумента, то выражение (1) принимает вид

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{2}$$

и называется конечной разностью функции f(x).

Подобно тому как определяется вторая производная от непрерывно дифференцируемой функции, определяется и конечная разность второго порядка, а именно

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta f(x)) = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x). \tag{3}$$

Аналогичным образом определяется конечная разность любого порядка n, т. е. имеем следующее равенство

$$\Delta^n y = \Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)). \tag{4}$$

Следует отметить, что конечные разности функции получаются через последовательные значения самой функции и коэффициенты бинома Ньютона. Другими словами, коэффициенты в этих формулах подчинены тому же закону, который наблюдается у степеней бинома [1]. Так бином Ньютона становится связующим звеном между школьной математикой, с одной стороны, и такими разделами математики, как комбинаторика, теория вероятностей, математический анализ, дифференциальные уравнения – с другой, обеспечивая принцип непрерывности и преемственности обучения на всех уровнях математического образования.

Отметим аналогии свойств операции дифференцирования d непрерывной функции и операции конечной разности Δ для соответствующей дискретной функции. Например, эти операции являются линейными и применение их к элементарным функциям приводит к совершенно одинаковым результатам с точностью до формы их представления. Рассмотрим их аналогии применительно к некоторым элементарным функциям. Пусть функции y = ax + b, y = a^x, a $>$ 0, a$\neq$ 1, y = sinx, y = lnx являются дискретными функциями. Тогда по формуле (2) имеем

Δy = Δ(ax + b) = aΔx,

Δy = Δ(a^x) = $a^x(a^{\Delta x} - 1)$,

Δy = Δ(lnx) = ln(x + Δx) – lnx = ln(1 + $\frac{\Delta x}{x}$),

Δy = Δsinx = sin(x + Δx) – sinx = 2sin$\frac{\Delta x}{2}$ cos(x + $\frac{\Delta x}{2}$),

и они также являются функциями от x.

Если в этих равенствах соответствующие функции являются непрерывно дифференцируемыми, то, переходя в обеих их частях к пределу при Δx⟶0, получим их соответствующие аналоги для непрерывных функций. Это означает, что разностный оператор Δ обладает рядом свойств, сходных с оператором дифференцирования d, а именно:

1) ΔC = 0, ∀C ∈ R;

2) Δ(f(x) $\pm$ $g(x)$) = Δf(x) $\pm$Δg(x);

3) Δ(f(x).g(x)) = f(x + Δx).Δg(x) + g(x).Δf(x);

4) Δ(Cf(x)) = C.Δf(x);

5) $\Delta^m(\Delta^n$y) = Δ^{m+n}y, m, n ∈ N.

Далее будем рассматривать функции вида y = f(n), n∈ N, играющие в дискретной математике и в школьном курсе математики важную роль. В этом случае, очевидно, x = n, Δx = 1, и равенство (2) примет вид

Δf(n) = f(n + 1) – f(n). (5)

Одним из основных моментов методической линии, развиваемой в настоящей статье, является обобщение формулы Ньютона – Лейбница для функций вида f(n), применение ее в целях исследования рекуррентных формул и вычисления сумм членов некоторых последовательностей.

Для этого поступаем следующим образом. Последовательно придавая аргументу n в равенстве (6) значения 1, 2, … получим:

Δf(1) = f(2) – f(1),

Δf(2) = f(3) – f(2),

Δf(n) = f(n + 1) – f(n).

Складывая левые и правые части этих равенств соответственно, имеем:

$\sum_{k=1}^{n} \Delta f(k)$ = f(n + 1) – f(1). (6)

Для функции f(n) равенство (7) и является аналогом формулы Ньютона – Лейбница, если ее представить в виде

$\int_a^b \frac{df(x)}{dx}dx$ = f(b) – f(a).

Применим формулу (7) для вычисления некоторых сумм. Совершенно очевидным является равенство $\sum_{k=1}^{n} a$ = na, т. е. в левой части равенства на самом деле находится n раз сложенная сумма элемента a. Найдем сумму 1 + 2 + … + n. Это – сумма n первых членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью прогрессии d = 1. Имеем равенство $\Delta k^2 = (k+1)^2 - k^2$ = 2k + 1. Суммируя обе части этого равенства по k, получим

$\sum_{k=1}^{n} \Delta k^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$.

Левая часть этого равенства по формуле (7) равна $(n+1)^2$– 1, а второе слагаемое правой части равно n. Тогда получим

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2} = \frac{(1+n)}{2}$n. (7)

Если первый член арифметической прогрессии с разностью d равен a_1, а $a_n = a_1$ + (n – 1)d, то, подставляя в правую часть последнего равенства вместо 1 значение a_1 , а вместо n (в скобках) значение a_1+ (n – 1)d, получим сумму первых n членов соответствующей арифметической прогрессии, т. е.

$S_n = \frac{2a_{1+(n-1)d}}{2}$n.

Используя формулу (7), найдем сумму вида q + q^2 + … + q^n. Для функции q^k имеем $\Delta q^k = q^{k+1} - q^k = q^k$(q – 1). Отсюда $q^k = \frac{\Delta q^k}{q-1}$. Суммируя обе части по k, получим

$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta q^k}{q-1} = \frac{q^{n+1}-q}{q-1} = \frac{q(q^n-1)}{q-1}$.

Эта сумма является суммой геометрической прогрессии с первым членом, равным q, и с таким же знаменателем. Если же в последнюю формулу вместе первого члена прогрессии со знаменателем q подставитьa_1, то получим следующую формулу для n первых членов геометрической прогрессии:

$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1}$.

Полученные выше формулы для нахождения суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессии, а также формулу (7) применим для вычисления суммы $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. Для функции f(k) = k^3 имеем $\Delta k^3 = (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Суммируя обе части последнего равенства по k, получим

$\sum_{k=1}^{n} \Delta k^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$.

Левая часть этого равенства по формуле (7) совпадает с $(n+1)^3 - 1$, второе слагаемое правой части, как было установлено выше, равно $3\,\frac{(n+1)n}{2}$, а третье слагаемое принимает значение n. Подставляя эти значения в последнее равенство, после элементарных преобразований получим

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (8)$$

Аналогичным образом нетрудно убедиться, что имеет место равенство

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

Таким же образом, методом рекурсии, можно получить формулы для вычисления суммы любых степеней членов натурального ряда. Следует отметить, что в некоторых учебных пособиях по математике профильной школы, в классических курсах вузовской математики в справедливости формул для суммы квадратов и кубов первых n чисел последовательности предлагают убедиться методом математической индукции, не объясняя происхождения самой формулы.

Рациональной последовательностью степени n натурального ряда называется последовательность рациональных чисел, определяемых формулой

$$f(k, n) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n, \qquad (9)$$

где все $a_i \in R$, k, n $\in N$.

Применяя приведенные выше способы нахождения сумм степеней членов натурального ряда, найдем сумму членов рациональной последовательности определенной степени. На конкретном примере продемонстрируем это действие, которое легко обобщается для рациональных последовательностей любой степени. Допустим, члены последовательности заданы, например, формулой f(k, 2) = $6k^2$ + 2k + 3. Очевидно, эта последовательность не является ни арифметической, ни геометрической прогрессией. Найдем сумму первых n членов этой последовательности, т. е.

$\sum_{k=1}^{n} f(k,2) = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3$ = n(n + 1)(2n + 1) + n(n + 1) + 3n = = $2n^3 + 4n^2$ + 5n. (К суммам в правой части равенства применены формулы (8) и (9)). Итак, сумма членов рациональной последовательности степени n определяется при условии, когда известны соответствующие суммы для всех степеней меньше, чем n. Идеи рекурсии носят категориальный и алгоритмический характер.

Выводы

Комбинирование идей и методов непрерывной и дискретной математики способствует целостному восприятию методических объектов и обобщению базовых математических понятий на уровне профильной школы. В частности, обнаружены аналогии форм представления и проявление сходных свойств непрерывных и соответствующих дискретных методических объектов. На основе дискретного аналога формулы Ньютона – Лейбница доказаны числовые равенства, играющие важную роль в школьной математике. Идея суммирования степеней членов натурального ряда обобщена на класс рациональных последовательностей. Интегральные методы способствуют также решению проблемы классификации математических объектов и понятий по наиболее общим (категориальным) признакам их отношений, обеспечивая тем самым непрерывность и преемственность математического образования в целом.

Литература

1. Гашков С. Б. Современная элементарная алгебра в задачах и решениях. М.: МЦНМО, 2006. 328 с.
2. Дорофеев С. Н. Теория и практика формирования творческой активности будущих учителей математики в педагогическом вузе. Автореф. дисс. ... д-ра пед. наук. М., 2000. 44 с.
3. Саранцев Г. И. Современное методическое мышление // Педагогика. 2010. № 1. С. 31–40.
4. Саранцев Г. И. Современные методы исследования в предметных методиках // Педагогика. 2015. № 6. С. 34–42.

5. Ярахмедов Г. А. Комплексный подход к математическому образованию в педагогическом вузе: теория и методология. Монография. Махачкала: АЛЕФ, 2013. 340 с.

6. Yarakhmedov G. A. On the geometric foundation of measure theory in mathematics education. International Conference “Process Management and Scientific Developments”, Birmingham, United Kingdom, 2020, pp. 48–55.

References

1. Gashkov S. B. *Sovremennaya elementarnaya algebra v zadachah i resheniyah* [Modern elementary algebra in problems and solutions]. Moscow, MCNMO Publishing House, 2006, 328 p. (in Russian)

2. Dorofeev S. N. *Teoriya i praktika formirovaniya tvorcheskoj aktivnosti budushchih uchitelej matematiki v pedagogicheskom vuze* [Theory and practice of forming the creative activity of future mathematics teachers in a pedagogical university]. Abstract of Doctor’s degree dissertation, Moscow, 2000, 44 p. (in Russian)

3. Sarantsev G. I. *Sovremennoe metodicheskoe myshlenie* [Modern methodical thinking]. Pedagogy. Journal, 2010, no. 1, pp. 31–40 (in Russian)

4. Sarantsev G. I. *Современные методы исследования в предметных методиках* [Modern research methods in subject methods]. Pedagogy. Journal, 2015, no. 6, pp. 34–42 (in Russian)

5. Yarakhmedov G. A. *Kompleksnyj podhod k matematicheskomu obrazovaniyu v pedagogicheskom vuze: teoriya i metodologiya. Monografiya* [An integrated approach to mathematical education in a pedagogical university: theory and methodology. Monograph]. Makhachkala, ALEF, 2013, 340 p. (in Russian)

6. Yarakhmedov G. A. On the geometric foundation of measure theory in mathematics education. International Conference “Process Management and Scientific Developments”, United Kingdom, Birmingham, 2020, pp. 48–55.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Принадлежность к организации

Ярахмедов Гаджиахмед Абдулганиевич, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, Россия, Yari.85@mail.ru

Гаджиев Тажудин Сиражудинович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информационных технологий и безопасности компьютерных систем, Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия, gts1964@mail.ru

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Affiliations

Gadzhiakhmed A. Yarakhmedov, Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia, Yari.85@mail.ru

Tazhudin S. Hajiyev, Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Information Technologies and Computer Systems Security. Dagestan State University, Makhachkala, Russia, gts1964@mail.ru

Принята в печать 15.02.2022

Received 15.02.2022